



ce
pre
UNI

TEORÍA

Geometría

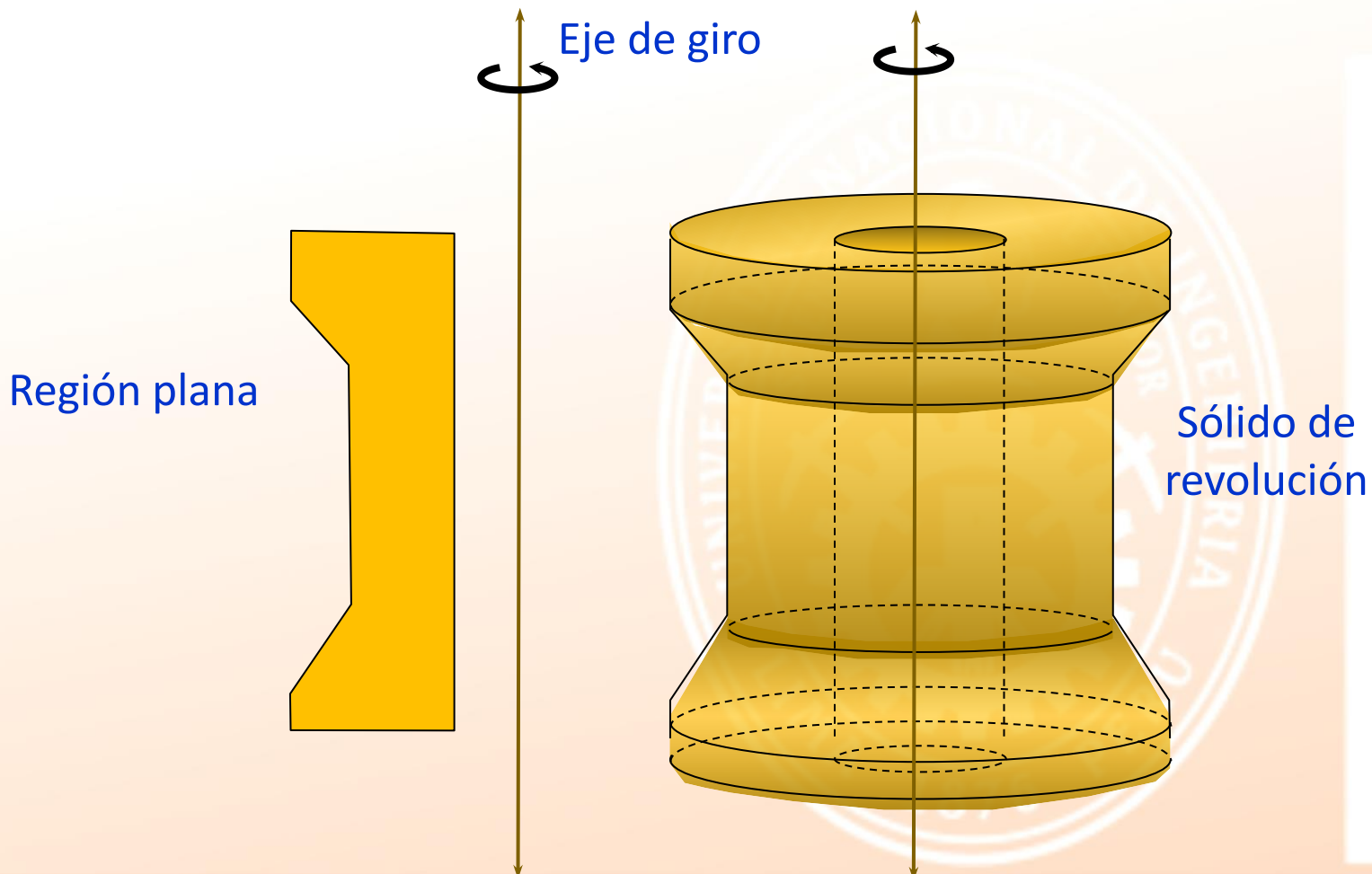
SÓLIDO DE REVOLUCIÓN

CICLO
PRE
2024-1



SÓLIDO DE REVOLUCIÓN

Definición.- Un **sólido de revolución** se genera al girar una vuelta, una región plana, alrededor de un eje coplanar a dicha región.



Teorema.- . El volumen del sólido generado por una región triangular al girar una vuelta alrededor de un eje coplanar que contiene sólo a un vértice; es igual a $\frac{1}{3} (S_{\overline{AC}})a$

Veamos el caso cuando $C \in L$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h_1 + \frac{1}{3} \pi r^2 h_2$$

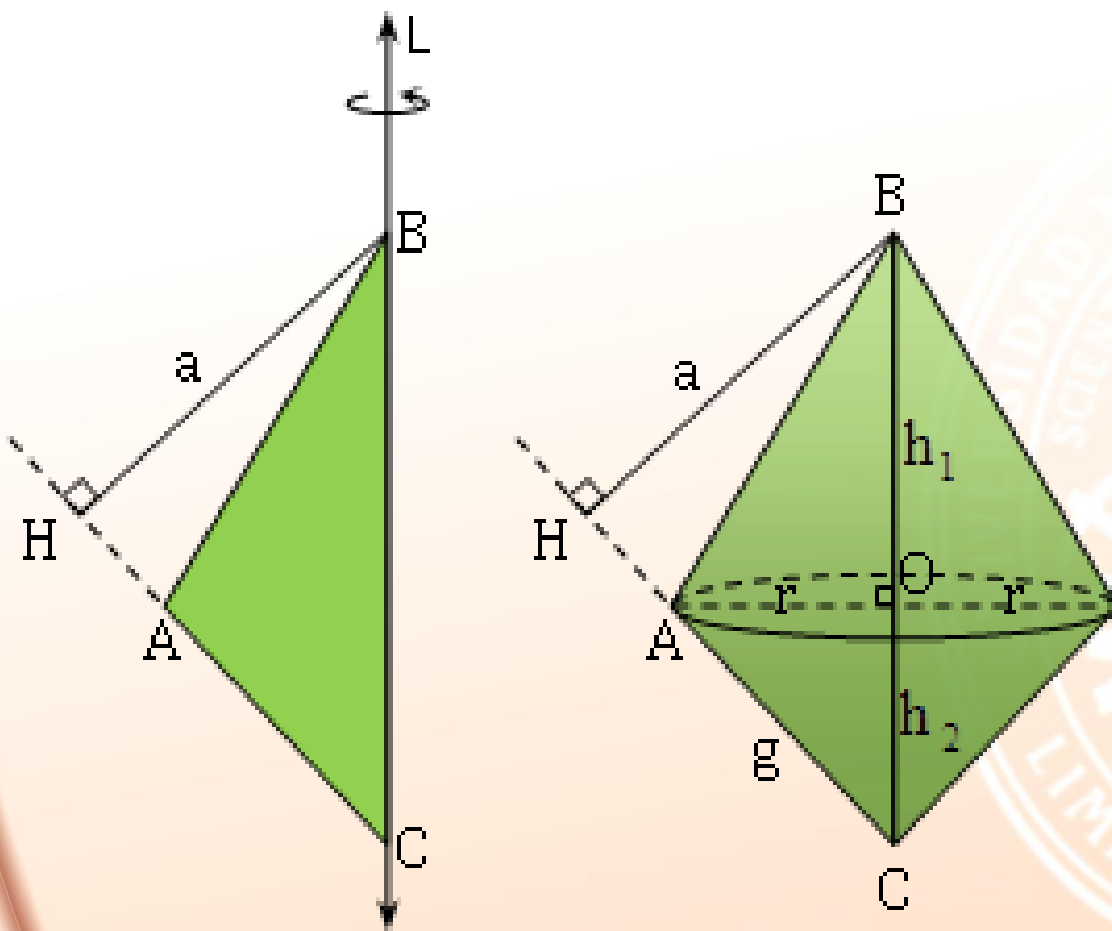
$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 (h_1 + h_2)$$

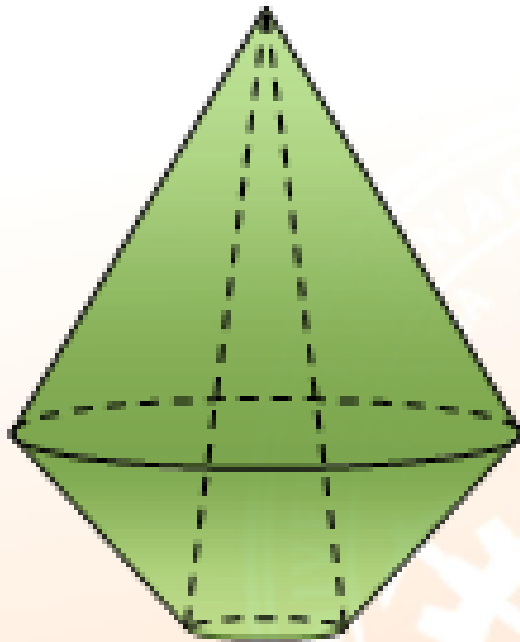
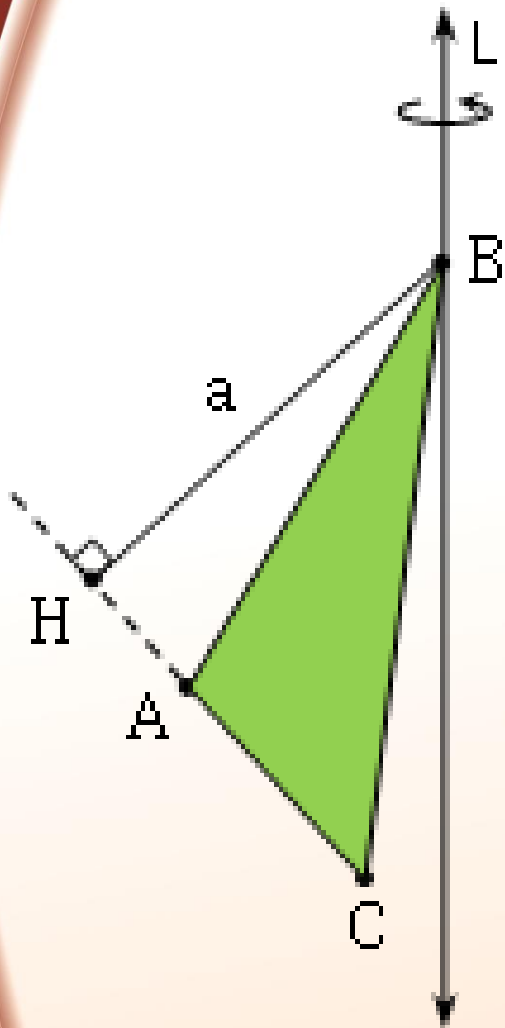
$$\Delta AOC \sim \Delta BHC \Rightarrow \frac{r}{a} = \frac{g}{h_1 + h_2}$$

$$r(h_1 + h_2) = ga$$

Luego: $V = \frac{1}{3} (\pi r g) a$

$$V = \frac{1}{3} (S_{\overline{AC}})a$$





Veamos el caso cuando $C \notin L$

$$V = V_{ABP} - V_{CBP}$$

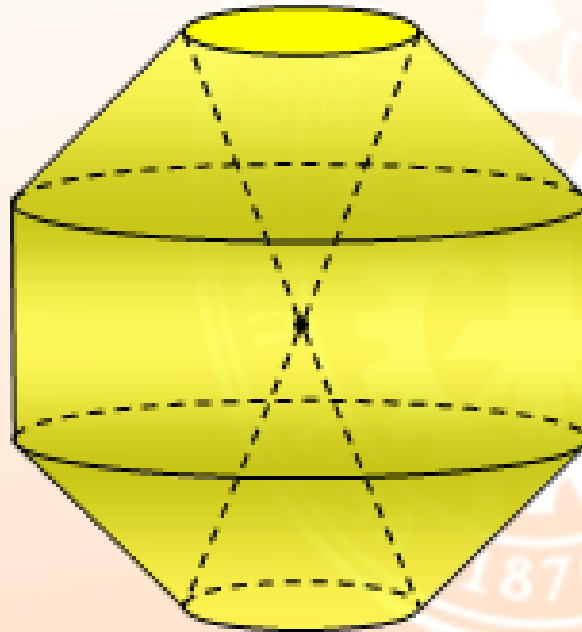
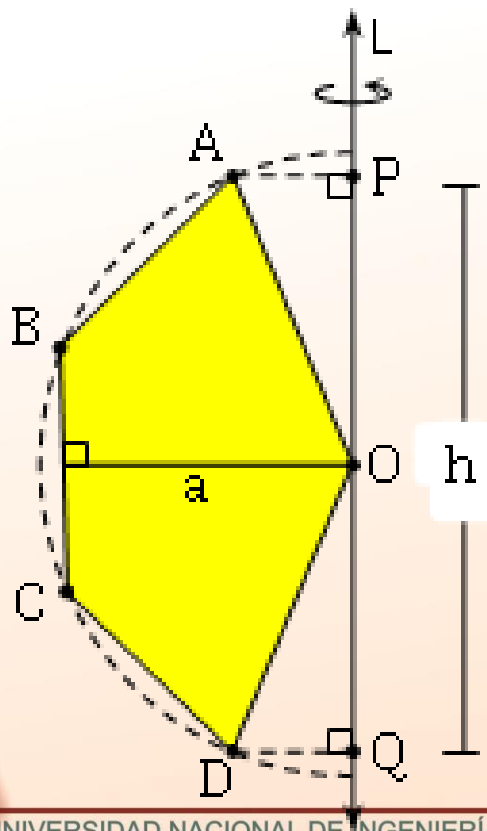
$$V = \frac{1}{3} (S_{\overline{AP}})a - \frac{1}{3} (S_{\overline{CP}})a$$

$$V = \frac{1}{3} (S_{\overline{AP}} - S_{\overline{CP}})a$$

$$\therefore V = \frac{1}{3} (S_{\overline{AC}})a$$

SÓLIDO GENERADO POR LA REVOLUCION DE UN SECTOR POLIGONAL REGULAR ALREDEDOR DE UN EJE COPLANAR

Teorema de Arquímedes.- El volumen del sólido generado por la revolución de un sector poligonal regular inscrito, alrededor de un eje coplanar que pasa por su centro, sin ser secante, es igual a un tercio del producto de la longitud de su apotema y el área de la superficie que genera la línea poligonal regular.



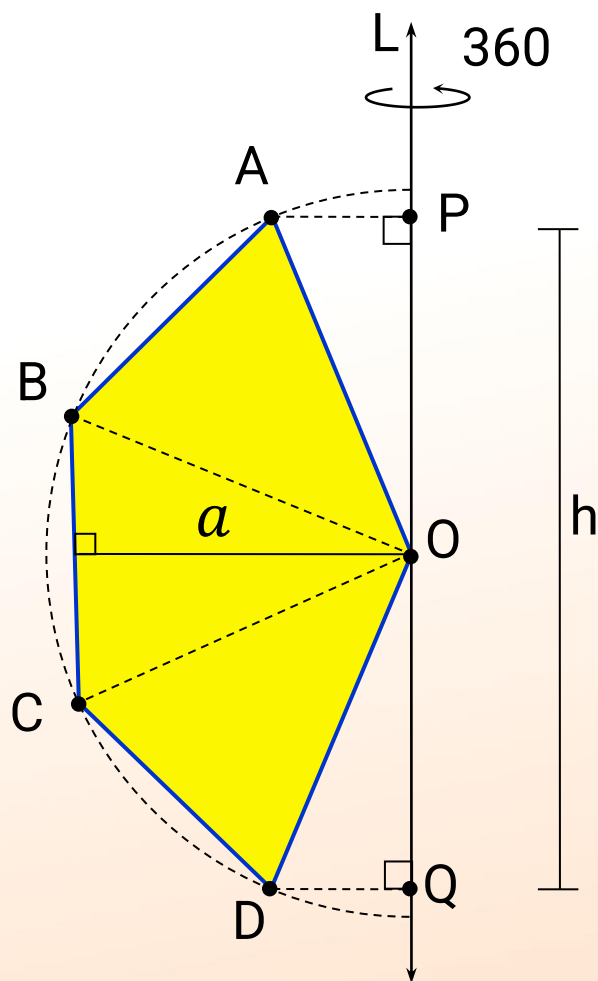
$$V = \frac{1}{3} (S_{ABCD}) a$$

$$V = \frac{1}{3} (2\pi \cdot a \cdot h) a$$

$$V = \frac{2\pi}{3} \cdot a^2 \cdot h$$

Demostración:

Dado el sector poligonal regular ABCDO de centro O y la recta L situados en un mismo plano tal que $O \in L$ y $ABCD \cap L = \emptyset$.



$$V = V_{AOB} + V_{BOC} + V_{COD}$$

Por teorema:

$$V = \frac{1}{3} (S_{\overline{AB}})a + \frac{1}{3} (S_{\overline{BC}})a + \frac{1}{3} (S_{\overline{CD}})a$$

$$V = \frac{1}{3} (S_{\overline{AB}} + S_{\overline{BC}} + S_{\overline{CD}})a$$

$$V = \frac{1}{3} (S_{ABCD})a$$

$$V = \frac{1}{3} (2\pi ah)a$$

$$\therefore V = \frac{2}{3} (\pi a^2)h$$

EJERCICIO 01

La región limitada por el trapecio rectángulo ABCD, gira 360 alrededor de la altura $\overline{CD}$, se prolonga $\overline{AD}$ hasta el punto T, tal que $m\angle BDT = 2(m\angle BAD)$, $AB = 12$ m y $BD = 10$ m. Calcule (en m^3) el volumen obtenido por la región triangular ABD.

A) $100,2 \pi$

B) $102,4\pi$

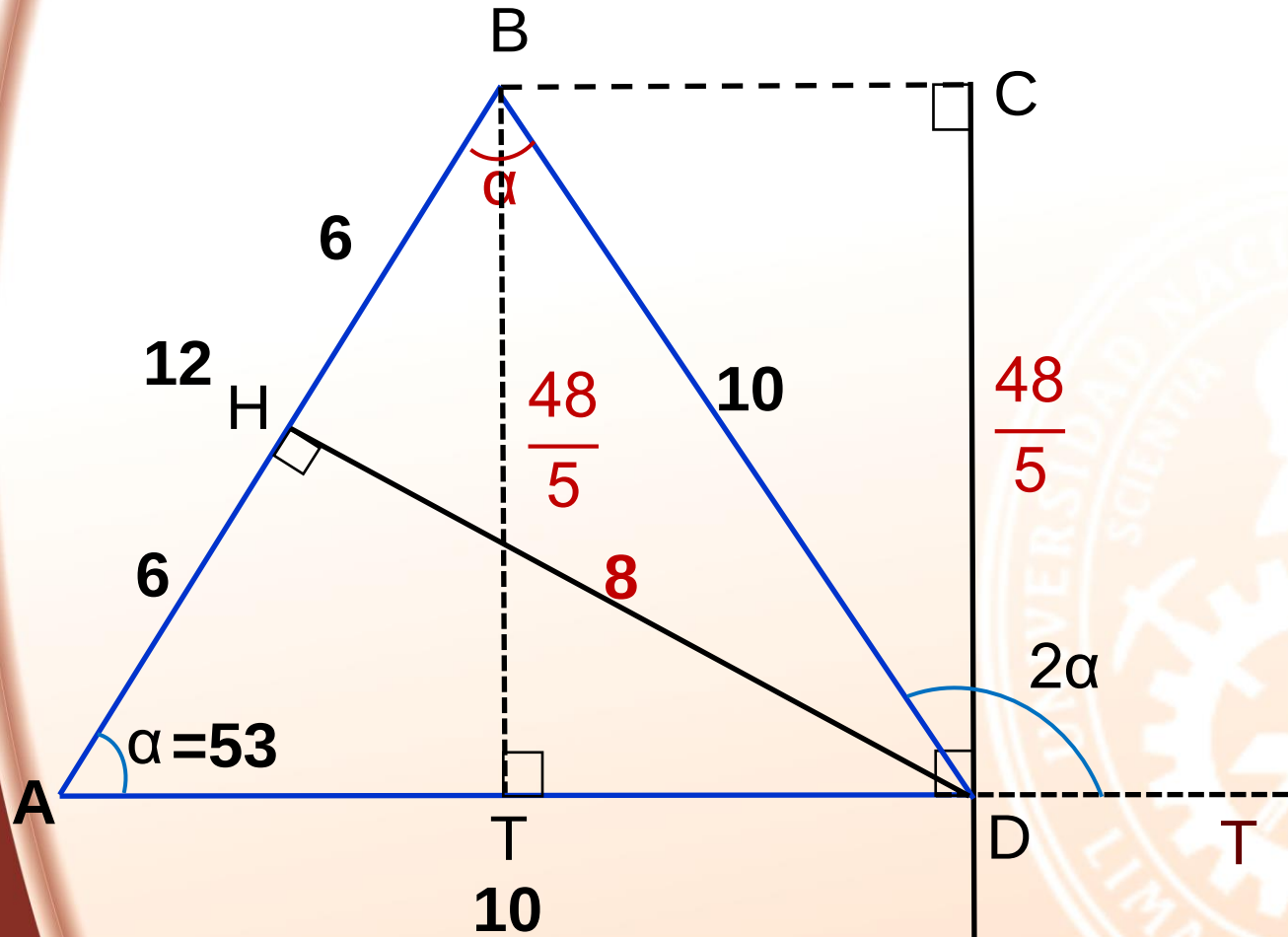
C) $105,4\pi$

D) $108,4 \pi$

E) $112,4 \pi$

RESOLUCIÓN 01

La región limitada por el trapecio rectángulo ABCD, gira 360 alrededor de la altura $\overline{CD}$, se prolonga $\overline{AD}$ hasta el punto T, tal que $m\angle BDT = 2(m\angle BAD)$, $AB = 12$ m y $BD = 10$ m. Calcule (en m^3) el volumen obtenido por la región triangular ABD.



$$V_{ABC} = \frac{1}{3} (S_{AB})(DH) = X$$

$$V_{ABC} = \frac{1}{3} \times 2\pi(CD)(DH)(DH)$$

$$\Delta DHA \text{ por } \angle 53: DH = 8$$

$$\Delta BTA \text{ por } \angle 53: BT = 12 \frac{4}{5} = \frac{48}{5}$$

$$V_{ABC} = \frac{1}{3} \times 2\pi\left(\frac{48}{5}\right)(8)(8)$$

$$V_{ABC} = 409.6 \pi$$

Clave: B

PROBLEMA 02

Un polígono regular ABCD... inscrito en una circunferencia de centro O, cuyo radio mide 2m, gira 360 alrededor del eje coplanario $\overleftrightarrow{XX'}$ que contiene al centro O, $m\angle COX = 15$ y $m\angle BOC = 60$. Calcule (en m^3) el volumen del sólido generado por la región ABCO.

A) $\pi (\sqrt{2} + \sqrt{2+\sqrt{3}})$

B) $2\pi (\sqrt{2} + \sqrt{2+\sqrt{3}})$

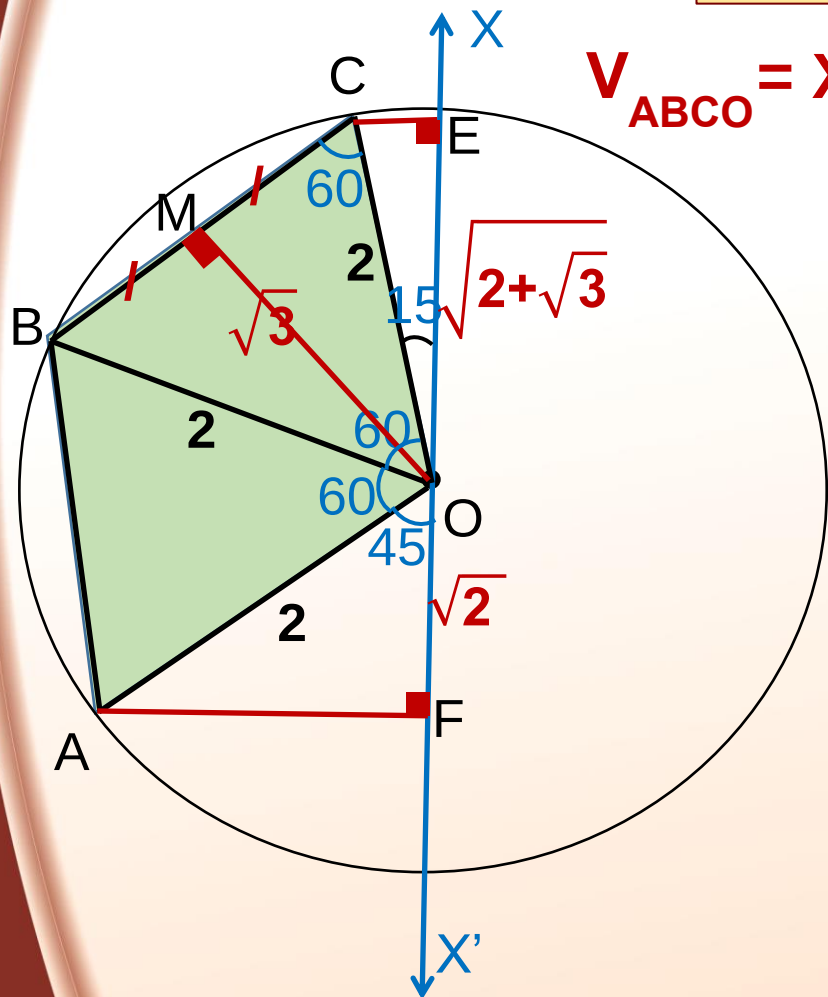
C) $3\pi (\sqrt{2} + \sqrt{2+\sqrt{3}})$

D) $4\pi (\sqrt{2} + \sqrt{2+\sqrt{3}})$

E) $5\pi (\sqrt{2} + \sqrt{2+\sqrt{3}})$

RESOLUCIÓN 02

Un polígono regular ABCD... inscrito en una circunferencia de centro O, cuyo radio mide 2m, gira 360 alrededor del eje coplanario $\overleftrightarrow{XX'}$ que contiene al centro O, $m\angle COX = 15$ y $m\angle BOC = 60$. Calcule (en m^3) el volumen del sólido generado por la región ABCO.



$$V_{ABCO} = X \quad V_{ABCO} = \frac{1}{3} S_{ABC} (OM) = X$$

$$S_{ABC} = 2\pi (EF) (OM) \left\{ \begin{array}{l} \Delta CMO \text{ por } \angle 60: \mathbf{MO} = \sqrt{3} \\ \Delta AFO \text{ por } \angle 45: \mathbf{FO} = \sqrt{2} \end{array} \right.$$

$$\Delta CEO: ap_{12} = \frac{r}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}} \Rightarrow r = 2$$

$$\mathbf{EO} = ap_{12} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

$$S_{ABC} = 2\pi (\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}) (\sqrt{3})$$

$$X = \frac{1}{3} [2\pi (\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}) (\sqrt{3})] (\sqrt{3})$$

$$\mathbf{X = 2\pi (\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}})}$$

Clave: B



ce
pre
UNI

TEORÍA

Geometría

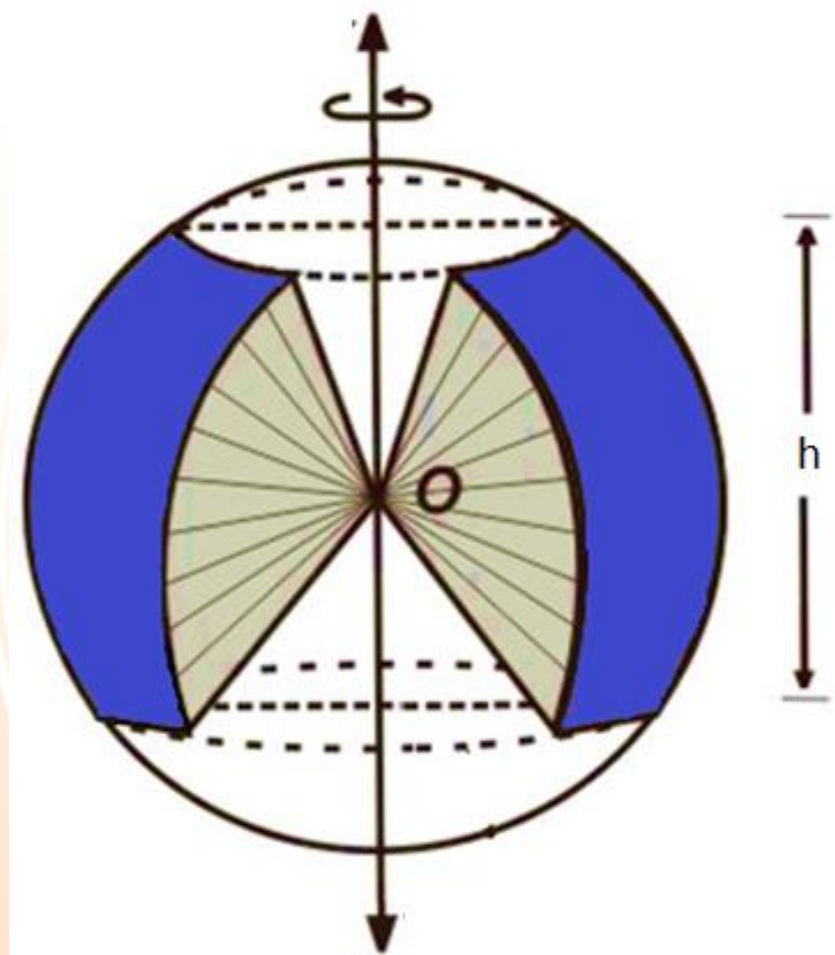
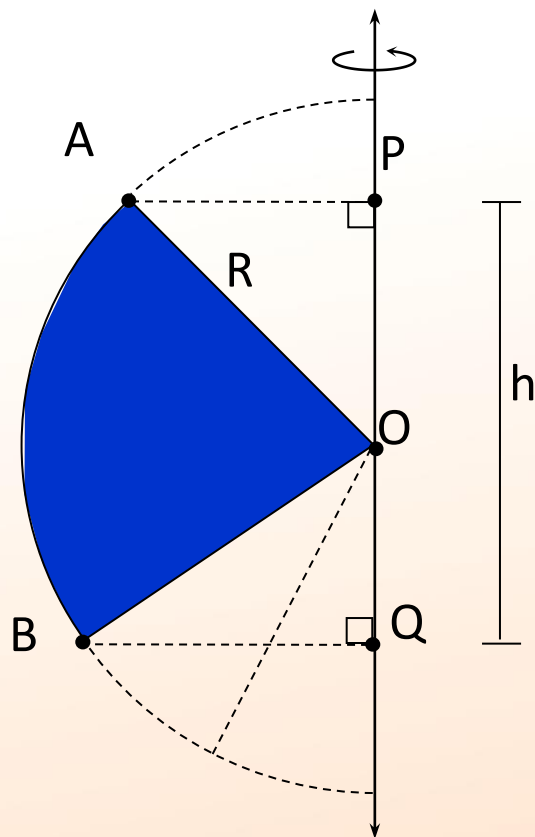
ESFERA

CICLO
PRE
2024-1



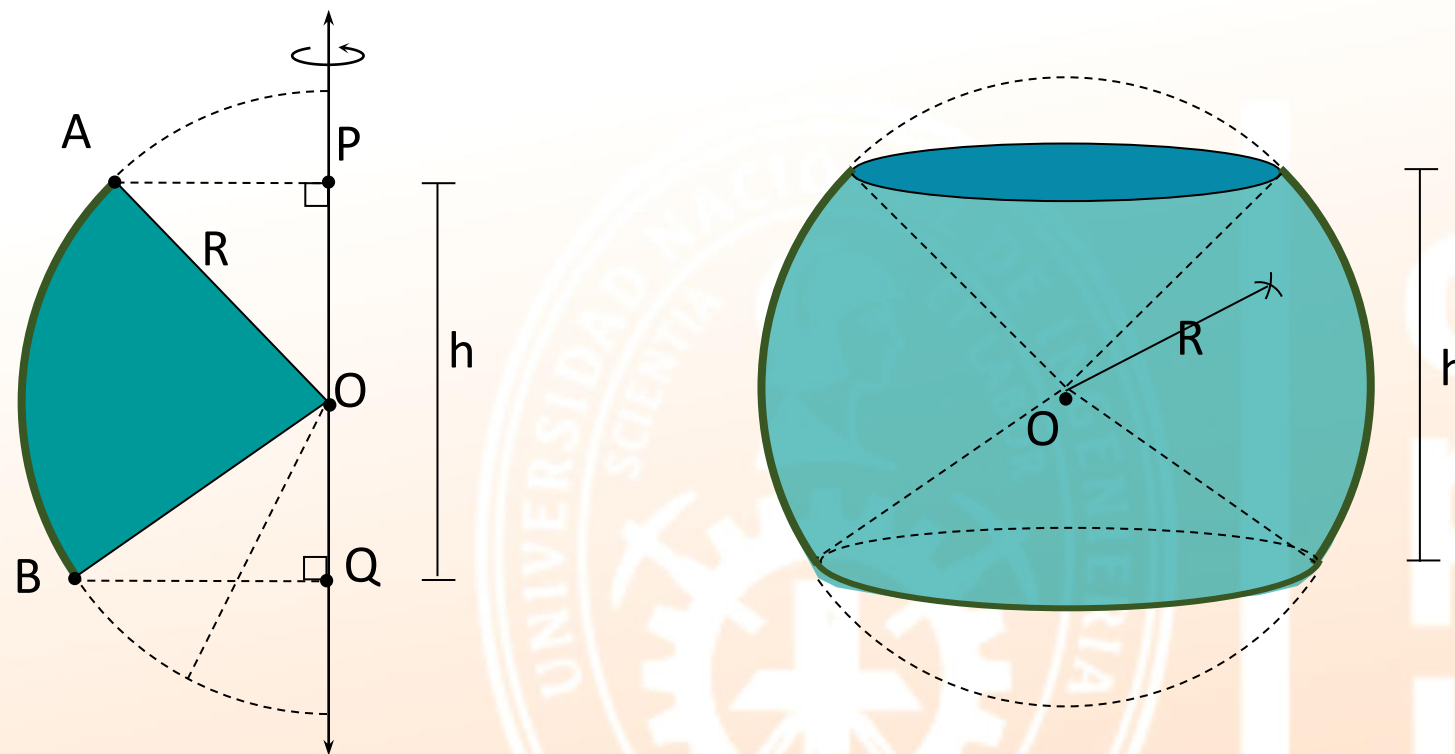
SECTOR ESFÉRICO

Definición.- Se denomina **sector esférico** al sólido generado por la revolución de un sector circular alrededor de un eje coplanar no secante al arco correspondiente (excepto en los extremos) y que contiene al centro.



ce
pre
UNI

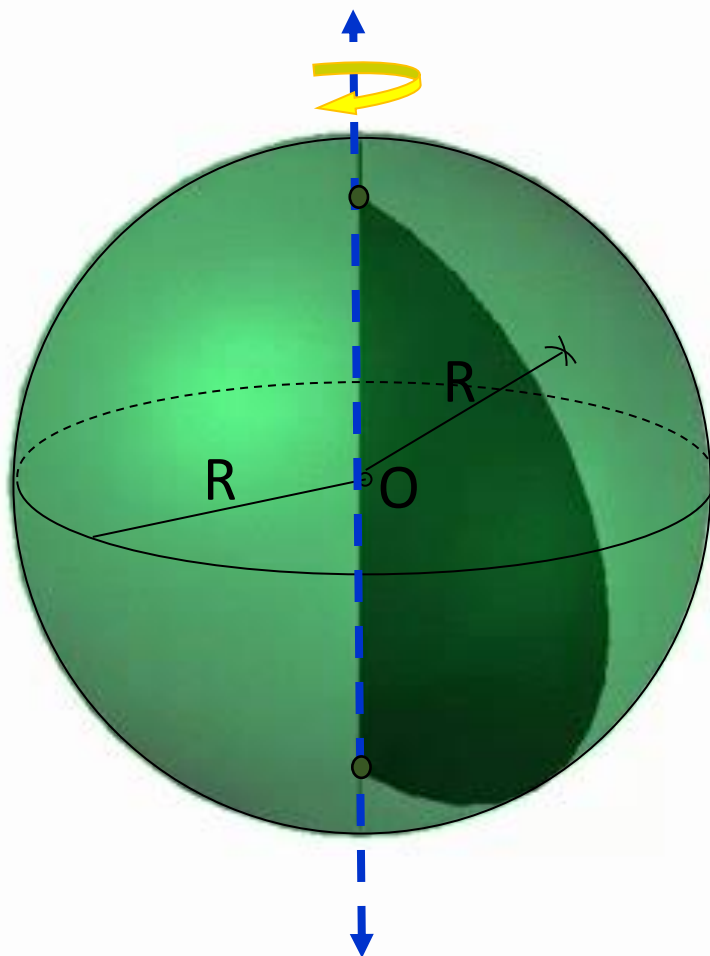
Teorema.- El volumen de un sector esférico es igual a los dos tercios del producto del área de un círculo máximo y la longitud de la proyección del arco correspondiente al sector, sobre el eje.



$$V_{SE} = \frac{2}{3} (\pi R^2) h$$

ESFERA

Definición.- Una **esfera** es el sólido generado por la revolución de un semicírculo alrededor del eje que contiene a un diámetro.

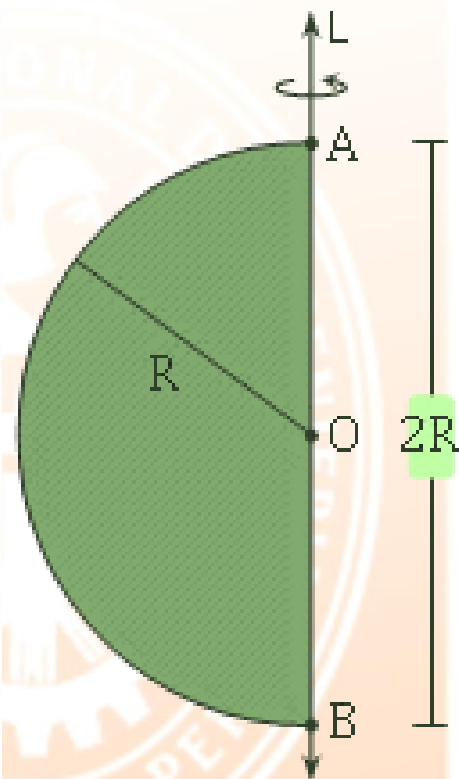


Teorema.- El volumen de una esfera de longitud de radio R es igual a $\frac{4}{3}\pi R^3$.

por el teorema de Arquímedes:

$$V_E = \frac{2}{3}(\pi a^2)h$$

$$V_E = \frac{2}{3}(\pi R^2)(2R)$$

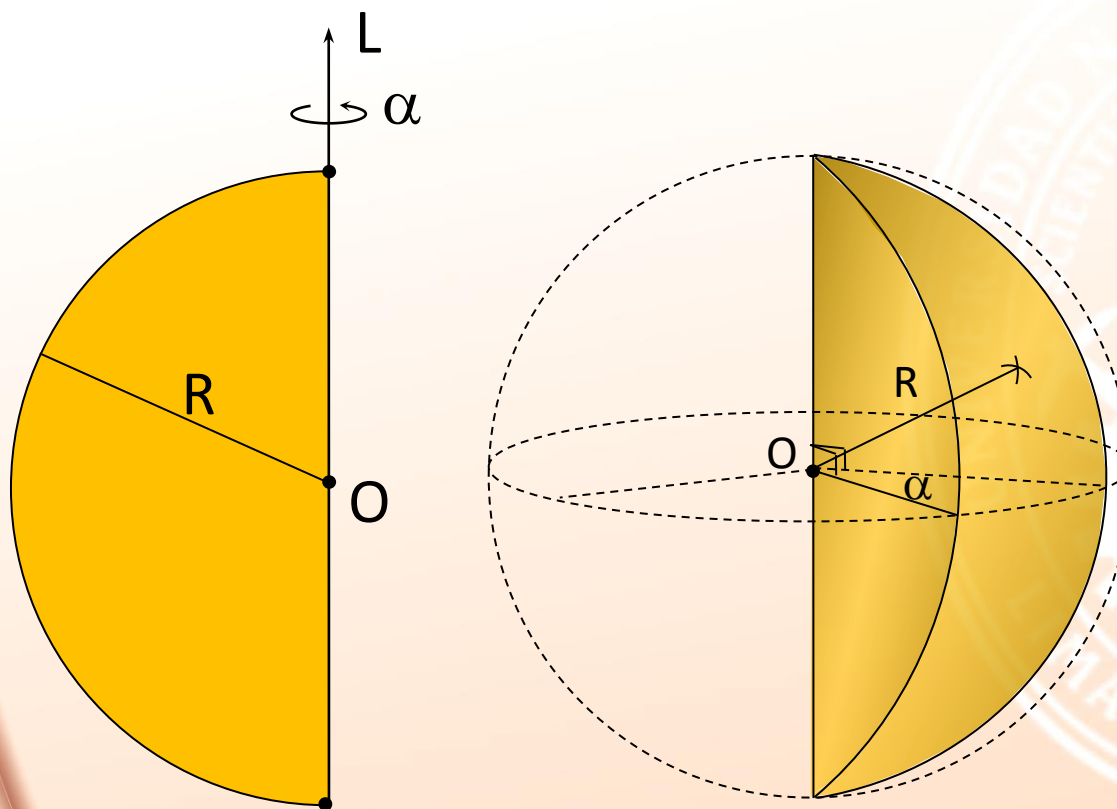


$$V_E = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$$

CUÑA ESFÉRICA

Definición.- Se denomina **cuña esférica** a la parte de esfera comprendida entre dos semicírculos máximos que tienen el diámetro común.

Teorema.- El volumen de la cuña esférica de radio que mide R y con medida α del ángulo diedro del huso esférico, es



Ángulo Central Área de la superficie

$$\begin{array}{rcl} 360^\circ & \text{-----} & \frac{4}{3}\pi R^3 \\ \alpha & \text{-----} & V_{CE} \end{array}$$

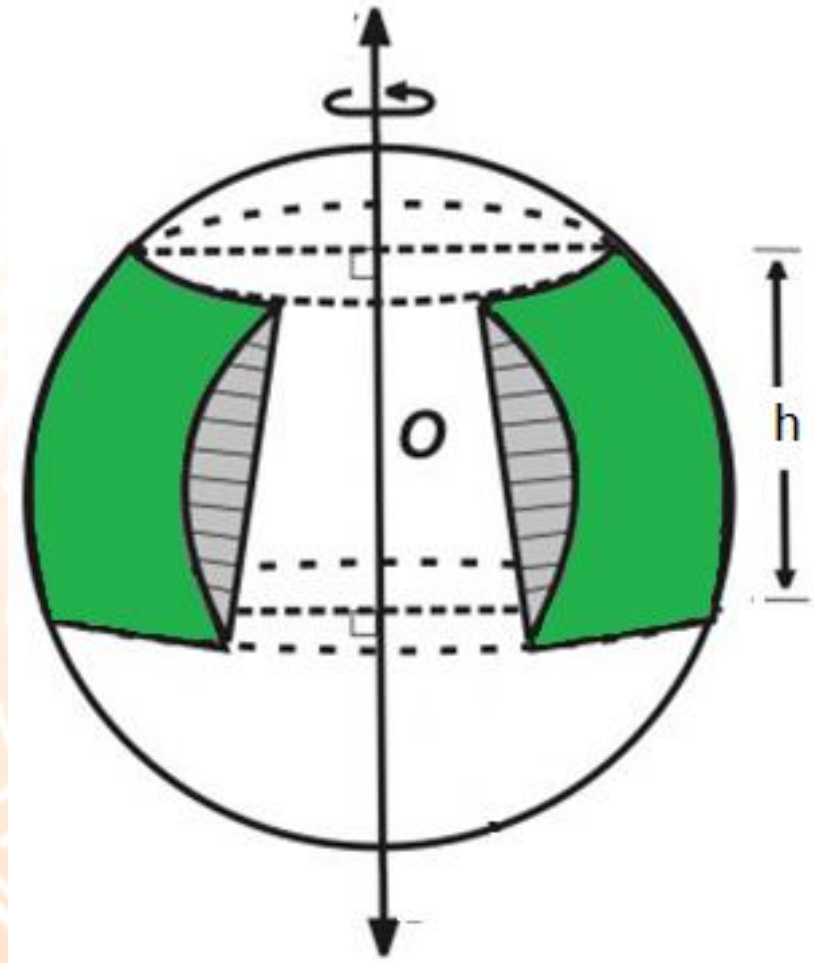
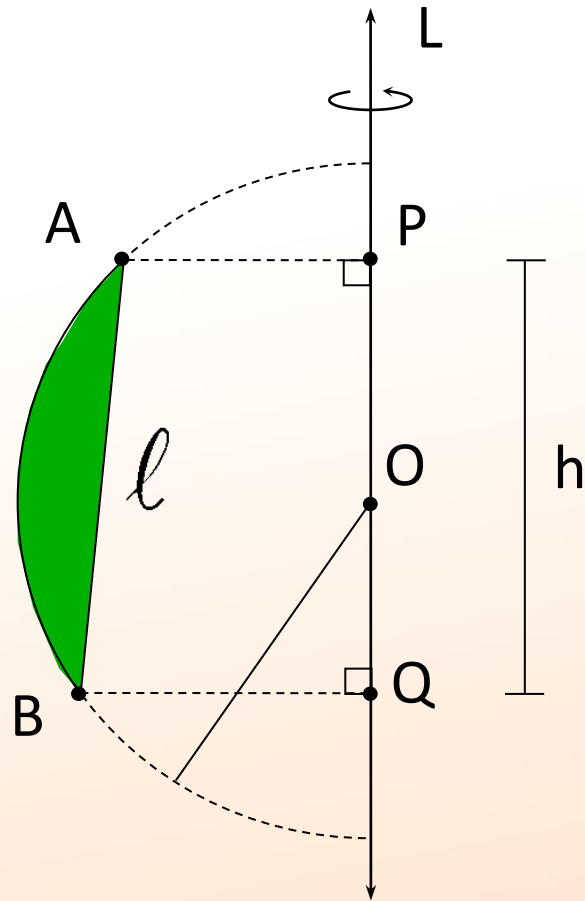
$$V_{\text{cuña Esf.}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \left(\frac{\alpha}{360} \right)$$

Donde :
 α es la medida del ángulo de giro.

$$V_{\text{Cuña Esf.}} = \left(\frac{\alpha}{270} \right) \pi R^3$$

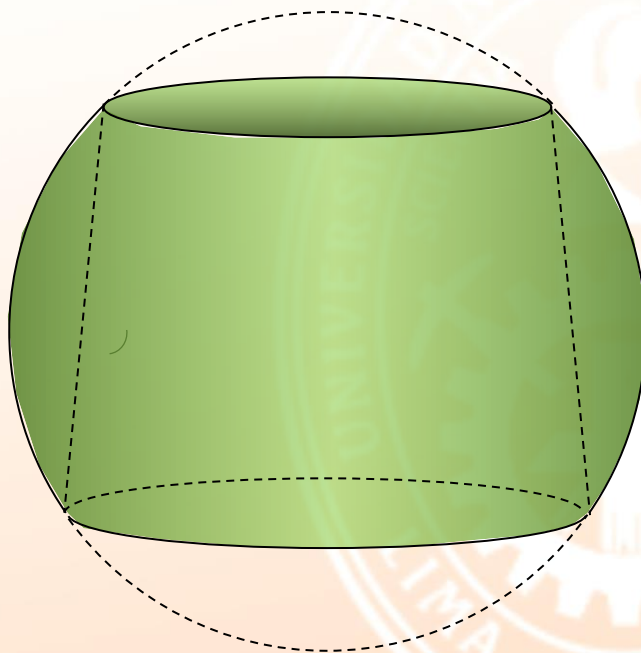
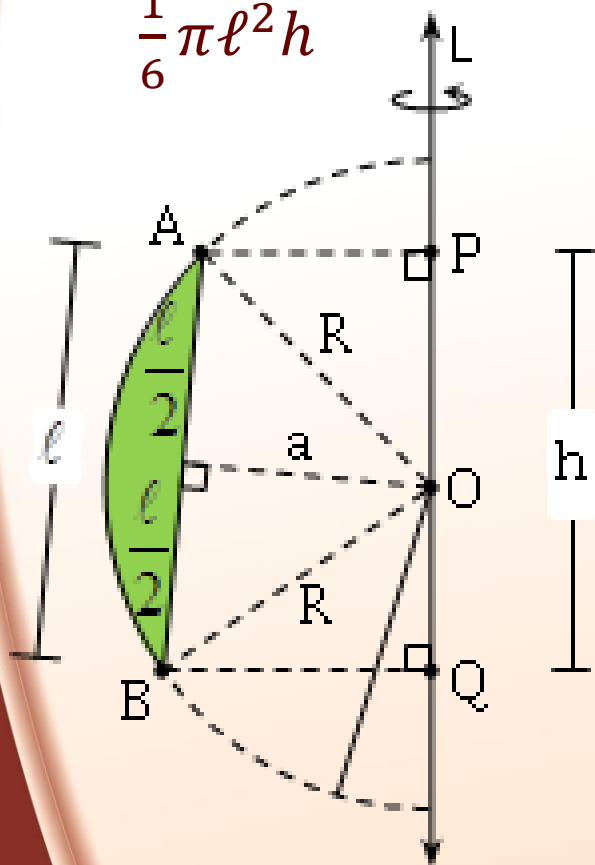
ANILLO ESFÉRICO

Definición.- Se denomina **anillo esférico** al sólido generado por la revolución de un segmento circular alrededor de un eje coplanar no secante al arco correspondiente y que contiene al centro.



Teorema.- El volumen de un anillo esférico con longitud de altura h y longitud ℓ de la cuerda del segmento circular generador, es

$$\frac{1}{6} \pi \ell^2 h$$



Dado el segmento circular AB de centro O cuyo radio mide R y la recta L situados en un mismo plano tal que $O \in L$ y $\widehat{AB} \cap L = \emptyset$.

$$V_{A.E.} = V_{S.E.} - V_{S.G_{AOB}}$$

$$V_{A.E.} = \frac{2}{3} \pi R^2 h - \frac{2}{3} \pi a^2 h$$

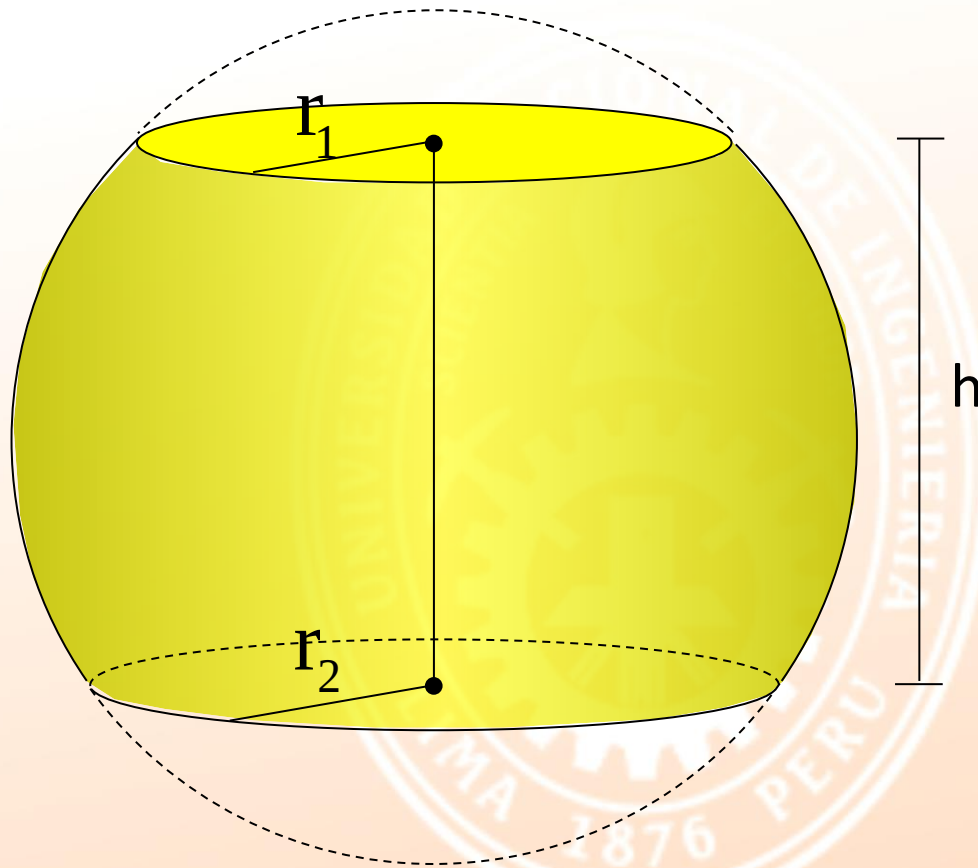
$$V_{A.E.} = \frac{2}{3} \pi (R^2 - a^2) h$$

$$V_{A.E.} = \frac{2}{3} \pi \left(\frac{\ell^2}{4} \right) h$$

$$V_{A.E.} = \frac{1}{6} \pi \ell^2 h$$

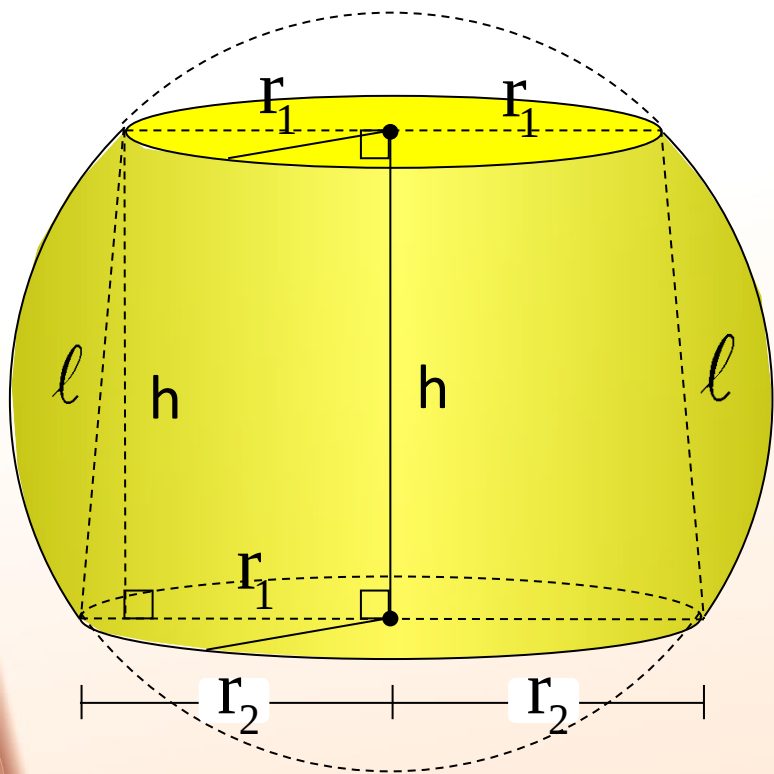
SEGMENTO ESFÉRICO DE DOS BASES

Definición.- Se denomina **segmento esférico de dos bases** a la parte de esfera comprendida entre los círculos determinados por dos planos paralelos entre si, secantes a la esfera.



Teorema.- El volumen de un **segmento esférico de dos bases** cuyos radios miden r_1 y r_2 , con longitud de altura h es $\frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi(r_1^2 + r_2^2)h$

Sean r_1 y r_2 las longitudes de los radios de las bases del segmento esférico cuya altura mide h



$$V_{S.E.} = V_{A.E.} + V_{T.C.}$$

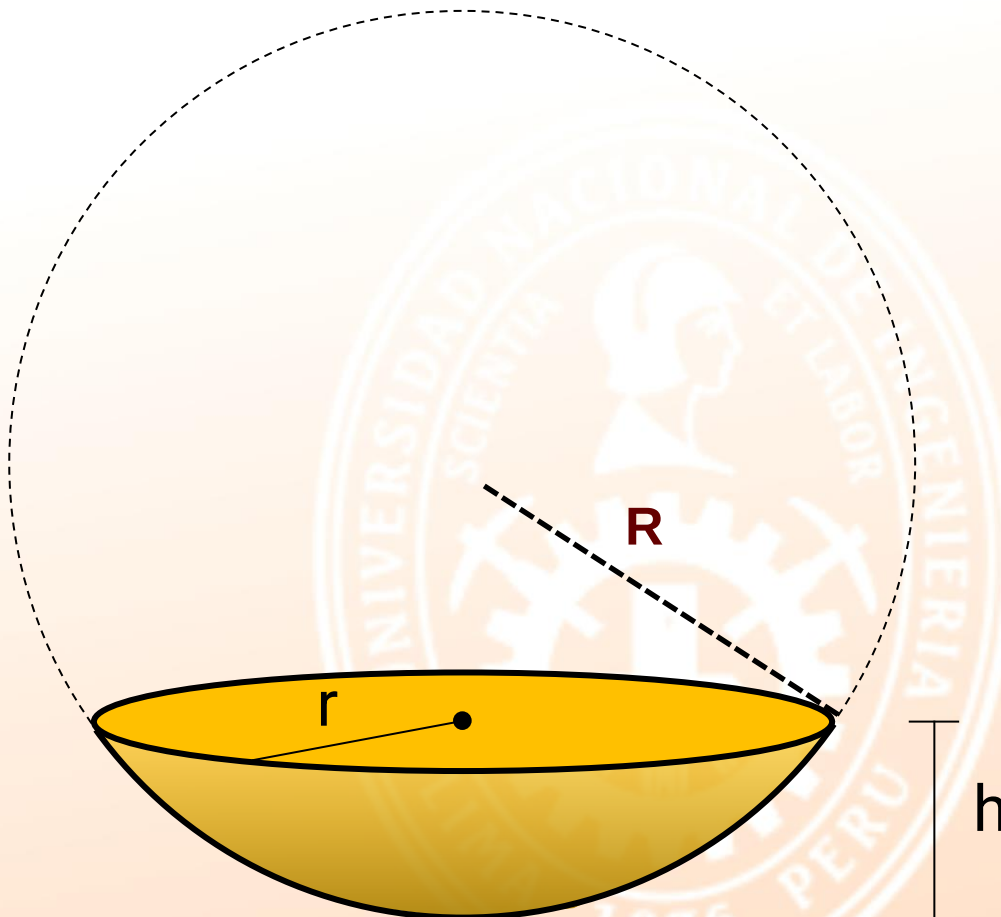
$$V_{S.E.} = \frac{1}{6}\pi \ell^2 h + \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

$$V_{S.E.} = \frac{1}{6}\pi [h^2 + (r_2 - r_1)^2]h + \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

$$V_{S.E.} = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi(r_1^2 + r_2^2)h$$

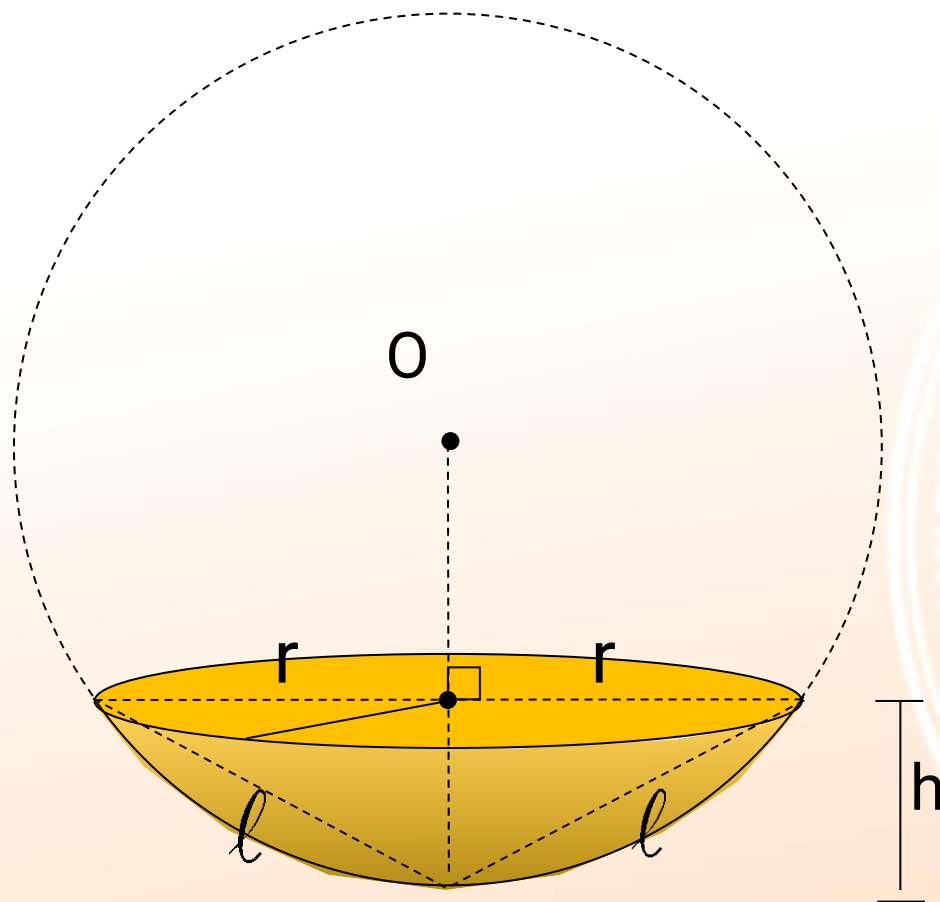
SEGMENTO ESFÉRICO DE UNA BASE

Definición.- El **segmento esférico de una base** es la parte de esfera determinada por un plano secante.



Teorema.- El volumen del **segmento esférico de una base**, cuya altura y radio de la base, miden respectivamente h y r , es $\frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi r^2 h$.

Sean r_1 y r_2 las longitudes de los radios de las bases del segmento esférico cuya altura mide h



$$V_{S.E.} = V_{A.E.} + V_{Cono}$$

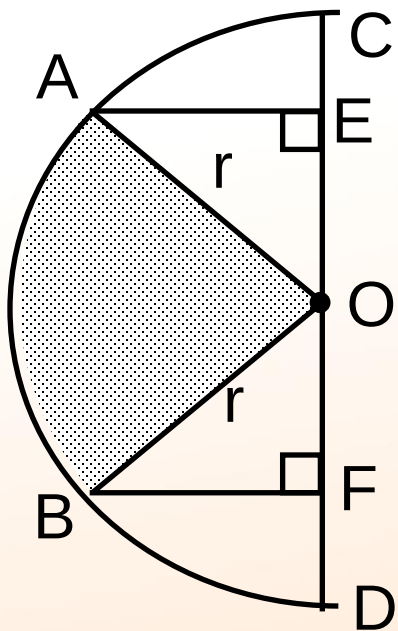
$$V_{S.E.} = \frac{1}{6}\pi \ell^2 h + \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$V_{S.E.} = \frac{1}{6}\pi(h^2 + r^2)h + \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$\therefore V_{S.E.} = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi r^2 h$$

EJERCICIO 03

En la figura mostrada, $EF = 1$ u, $OA = OB = r = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\pi}}$ u, el sector circular AOB gira sobre el diámetro $\overline{CD}$ y genera un sólido cuyo volumen (en u^3) es



A) 3

B) 4

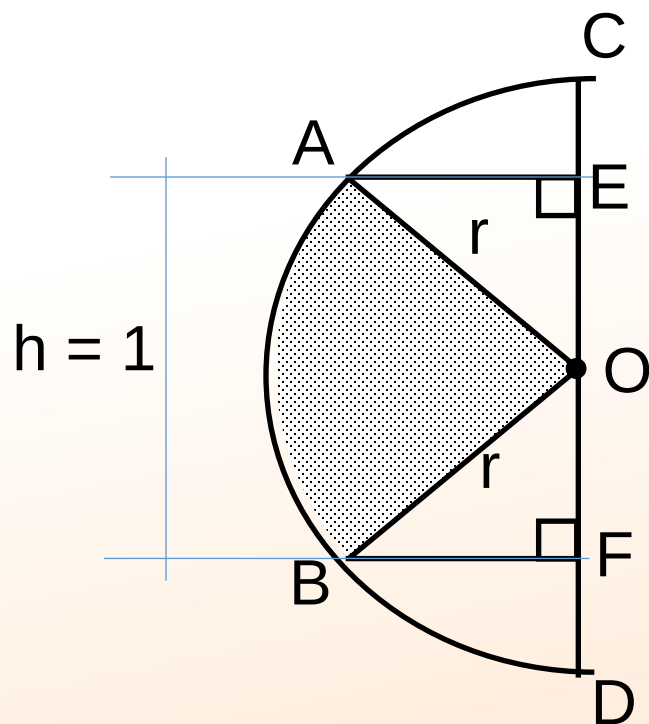
C) 5

D) 6

E) 9

RESOLUCIÓN 03

En la figura mostrada, $EF = 1$ u, $OA = OB = r = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\pi}}$ u, el sector circular AOB gira sobre el diámetro $\overline{CD}$ y genera un sólido cuyo volumen (en u^3)



Calcular : $V_X = \frac{2}{3} \pi (r)^2 (h)$

Dato: $r = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\pi}}$

$$V_X = \frac{2}{3} \pi \left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\pi}} \right)^2 (1)$$

$$V_X = 4 u^3$$

Clave: C

EJERCICIO 04

Se inscribe una esfera en un cono de revolución, dos generatrices opuestas determinan un ángulo de 60° y el diámetro de la base es 18 u. Calcule el volumen de la esfera (en u^3).

A) $52\pi\sqrt{3}$

B) $58\pi\sqrt{3}$

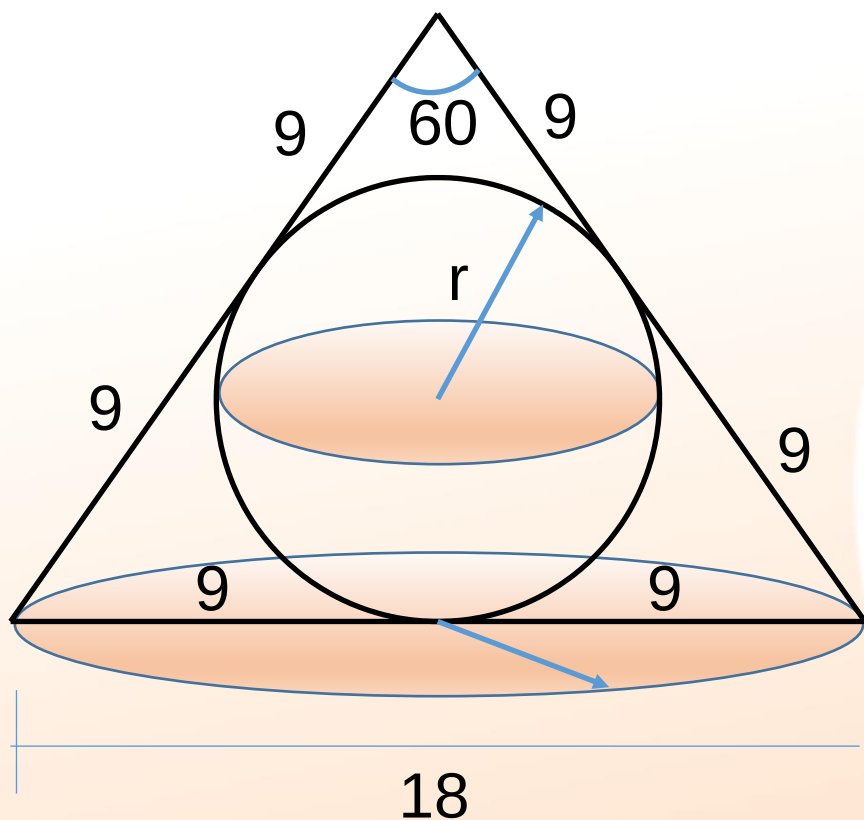
C) $72\pi\sqrt{3}$

D) $98\pi\sqrt{3}$

E) $108\pi\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN 04

Se inscribe una esfera en un cono de revolución, dos generatrices opuestas determinan un ángulo de 60° y el diámetro de la base es 18 u. Calcule el volumen de la esfera (en u^3).



Calcular : $V_x = \frac{4\pi r^3}{3}$

$$3r = 9\sqrt{3} \rightarrow r = 3\sqrt{3}$$

$$V_x = \frac{4\pi(3\sqrt{3})^3}{3}$$

$\rightarrow V_x = 108\sqrt{3}\pi$

Clave: E

EJERCICIO 05

El volumen de una esfera es numéricamente igual a su área. Si el área del huso es $\frac{3}{18}$ del área de la esfera, calcule el volumen de la cuña esférica correspondiente.

A) 4π B) 5π C) 6π D) 8π E) 9π

RESOLUCIÓN 05

El volumen de una esfera es numéricamente igual a su área. Si el área del huso es $\frac{3}{18}$ del área de la esfera, calcule el volumen de la cuña esférica correspondiente..

Calcular $V = \frac{\pi(R)^3 \alpha}{270}$

Dato1: $\frac{4}{3} \pi(R)^3 = 4\pi R^2 \rightarrow R = 3$

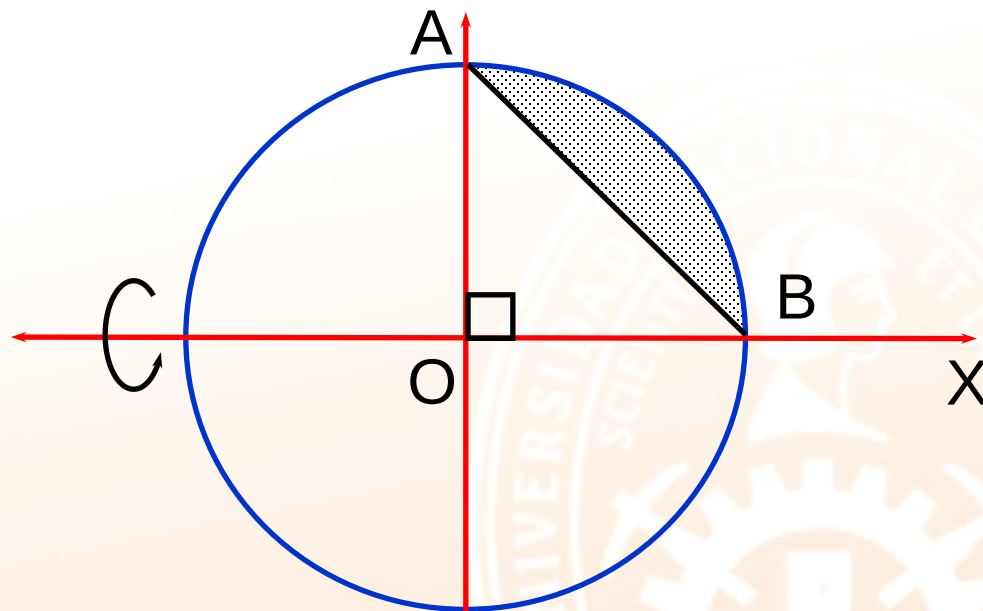
Dato2: $\frac{\pi(R)^2 \alpha}{90} = \frac{3}{18} 4\pi(3)^2 \rightarrow \alpha = 60$

$$\therefore V_x = \frac{\pi(R)^3 \alpha}{270} = 6\pi$$

Clave: C

EJERCICIO 06

En la siguiente figura, calcule el volumen del sólido generado al girar el segmento circular AB alrededor del eje X.



A) $\frac{2}{3} \pi R^3$

B) $\frac{3}{2} \pi R^3$

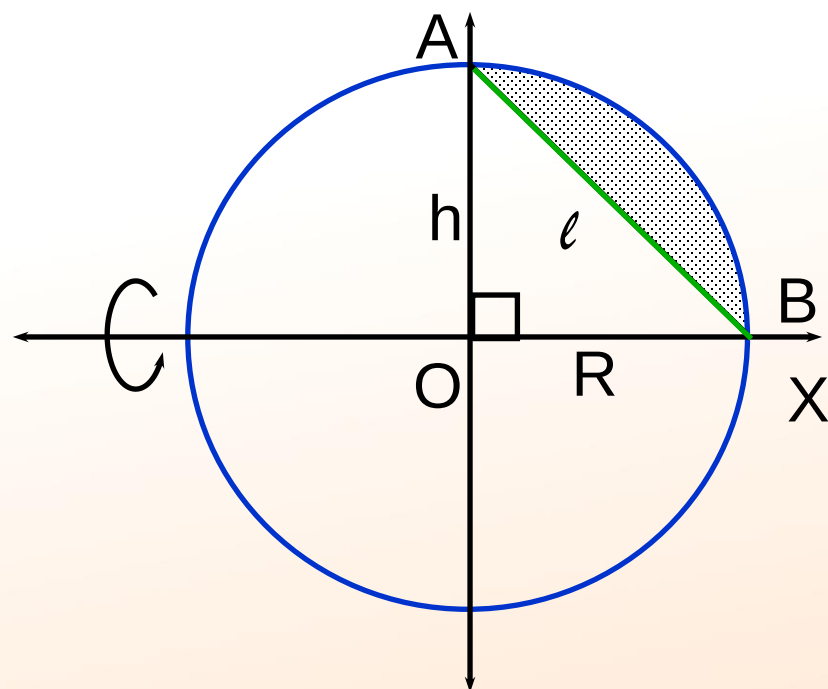
C) $\frac{\pi}{3} R^3$

D) $\frac{\pi}{2} R^3$

E) $2\pi R^3$

RESOLUCIÓN 06

En la siguiente figura, calcule el volumen del sólido generado al girar el segmento circular AB alrededor del eje X.



$$V_x = \frac{\pi \ell^2 h}{6}$$

$$\ell = R\sqrt{2}, h = R$$

$$V_x = \frac{\pi R^3}{3}$$

Clave: C

EJERCICIO 07

El diámetro de una esfera mide $4\sqrt{3}$ y en él, hay un segmento esférico de una base. Calcule el volumen del menor segmento esférico que determina el casquete (en u^3), sabiendo que el área de la base de dicho segmento esférico es $9\pi u^2$.

A) $10\pi\sqrt{3}$

B) $20\pi\sqrt{2}$

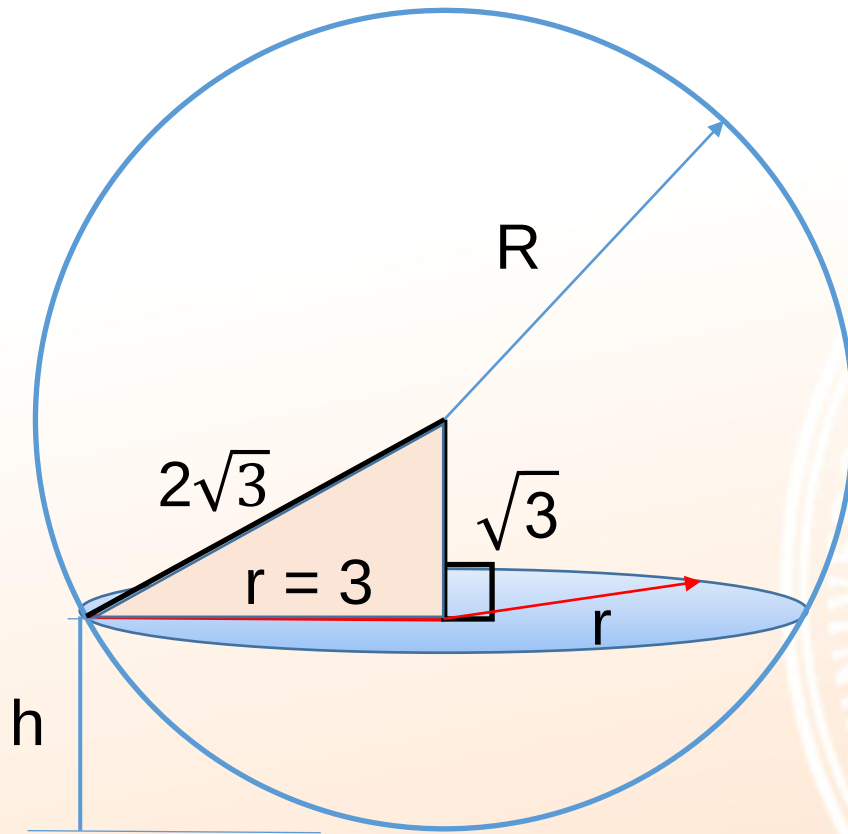
C) $15\pi\sqrt{3}$

D) 20π

E) $20\pi\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN 07

El diámetro de una esfera mide $4\sqrt{3}$ y en él, hay un segmento esférico de una base. Calcule el volumen del menor segmento esférico que determina el casquete (en u^3), sabiendo que el área de la base de dicho segmento esférico es $9\pi u^2$.



Dato:

$$2R = 4\sqrt{3} \rightarrow R = 2\sqrt{3}$$

Dato:

$$\pi r^2 = 9\pi \rightarrow r = 3$$

$$h = \sqrt{3}$$

$$V = \pi h^2 / 3 (3R - h)$$

$$V = 15\pi\sqrt{3}$$

Clave: C



ce
pre
UNI

**MATERIAL DE
ESTUDIO**

Geometría

EJERCICIOS PROPUESTOS

**CICLO
PRE
2024-1**



PROBLEMA 264

Indique el valor de verdad de cada proposición:

- I. Todos los segmentos esféricos son conjuntos convexos.
- II. Todo plano secante a una esfera determina una región circular.
- III. Alguna intersección de dos segmentos esféricos es otro segmento esférico.

A) FFF

D) VFV

B) FVF

E) VVV

C) VFF

ce
pre
UNI

PROBLEMA 265

En una esfera de radio R , se inscribe un cilindro de revolución con radio r en su base. Si $3R = 5r$ y el volumen del cilindro de revolución es $27 u^3$, entonces el volumen (en u^3) de la esfera es

A) $\frac{135}{2}$

D) $\frac{145}{2}$

B) $\frac{125}{3}$

E) $\frac{125}{2}$

C) $\frac{135}{3}$

PROBLEMA 266

Si la razón entre el volumen de un cono de revolución y de la esfera inscrita en dicho cono es V . Calcule la razón entre el área de la superficie total del cono y el área de la superficie esférica

A) $\frac{V}{2}$

D) $\frac{V}{2}$

B) $\frac{V}{3}$

E) $\frac{V}{2}$

C) $\frac{V}{3}$

PROBLEMA 268

En un cono circular recto, una generatriz es congruente con el diámetro de la circunferencia de la base y el volumen del sólido que determina el cono es $24 \pi u^3$. Calcule el volumen (en u^3) de la esfera inscrita al cono.

A) 18π

D) $\frac{28 \pi}{3}$

B) 24π

E) $\frac{42 \pi}{3}$

C) $\frac{32 \pi}{3}$

PROBLEMA 270

Calcule el volumen de la esfera inscrita en un octaedro regular de longitud de arista a .

A) $\frac{\sqrt{6}\pi}{9}a^3$

D) $\frac{\sqrt{3}\pi}{4}a^3$

B) $\frac{\sqrt{3}\pi}{9}a^3$

E) $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}a^3$

C) $\frac{\sqrt{3}\pi}{27}a^3$

PROBLEMA 271

En una superficie esférica está inscrito un tronco de cono de revolución el cual **está circunscrito** a una esfera. Si los radios de las bases del tronco de cono miden 4 u y 2 u, entonces el volumen (en u^3) del segmento esférico de dos bases determinado es

A) $\frac{184\sqrt{2}\pi}{3}$

B) $\frac{184\sqrt{3}\pi}{3}$

C) $\frac{184\sqrt{5}\pi}{3}$

D) $\frac{184\sqrt{7}\pi}{3}$

E) $\frac{184\sqrt{11}\pi}{3}$

PROBLEMA 272

Calcule (en u^3) el volumen de un sector esférico correspondiente a una esfera de longitud de radio $8\ u$ y cuya área de la superficie esférica del sector esférico **es** $24\pi\ u^2$.

A) $12\ \pi$

D) $48\ \pi$

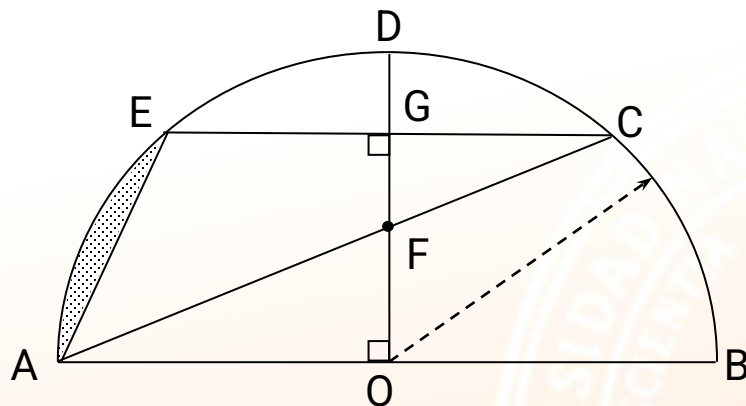
B) $24\ \pi$

E) $64\ \pi$

C) $36\ \pi$

PROBLEMA 273

Según el gráfico, $AF = 4u$ y $FC = 2u$, entonces el volumen del sólido generado por el segmento circular AE al girar una vuelta alrededor de $\overleftrightarrow{AB}$ es



A) $\pi\sqrt{3}$

D) $3\pi\sqrt{3}$

B) $2\pi\sqrt{3}$

E) $3,5\pi\sqrt{3}$

C) $2,5\pi\sqrt{3}$